

УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

А. В. ЖИЛЬЦОВ, Д. С. СОРОКІН

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ КОАКСІАЛЬНО-ЛІНІЙНОГО ДВИГУНА З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ

На основі вісесиметричної інтегро-диференційної математичної моделі коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами розроблено алгоритм сумісного чисельного розв'язку нестационарної електромеханічної задачі з розрахунку вихрових струмів в масивних провідниках, його динамічних та енергетичних характеристик.

Ключові слова: коаксіально-лінійний двигун, постійні магніти, нестационарний процес, метод інтегральних рівнянь, вихрові струми

Вступ. Головною особливістю режимів роботи лінійних двигунів є неможливість одночасного використання всіх контурів вторинної обмотки системи (обмотки статора). Це призводить до появи перехідних процесів у первинних та вторинних контурах на протязі всього робочого циклу двигуна і, як наслідок, збільшення втрат у крайових зонах магнітопроводів, зменшення ККД та коефіцієнта потужності.

Електромеханічні процеси, які протікають в коаксіально-лінійному двигуні після підключення його статорної обмотки до мережі, описуються складними системами інтегро-диференційних рівнянь (інтегральними за просторовими змінними, диференційними за часом) [1,5] розв'язок яких можливий лише чисельними методами [6].

Різноманітність конструктивних рішень лінійних електричних машин спричиняє необхідність аналізу електромеханічних процесів в них з метою подальшого визначення оптимальних геометричних та електрофізичних параметрів, режимів їх роботи.

При розробці конструкцій лінійних електричних машин і режимів їх роботи важливу роль відіграє математичне моделювання впливу технологічних і конструктивних параметрів електротехнічних пристроїв на зв'язані електромагнітні і механічні процеси, що протікають в них. У загальному випадку це потребує вирішення тривимірних крайових задач для рівнянь Максвелла в необмеженій неоднорідній області, що містить геометрично складні феромагнітні і провідні тіла, рівнянь руху:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{\delta} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_{em} + m \vec{g} + \vec{F}_s + \vec{F}_d. \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}. \quad (3)$$

Тут \vec{E} – напруженість електричного поля, В/м; \vec{H} – напруженість магнітного поля, А/м; \vec{B} – магнітна індукція, Тл; $\vec{\delta}$ – густина струму, А/м³; γ – питома провідність, См/м; μ – абсолютна магнітна проникність середовища, Гн/м; \vec{V} – швидкість руху якоря, м/с; m – маса якоря, кг; \vec{g} – прискорення вільного падіння, 9,81 м/с²; \vec{r} – радіус-вектор положення яко-

ря, м; t – час, с; \vec{F}_e – сила пружності пружин, до яких прикріплено якір лінійного двигуна, Н; k – коефіцієнт жорсткості пружин, Н/м; \vec{F}_{em} – сила, що діє на якір з боку електромагнітного поля, Н; \vec{F}_s – зовнішня сила, що діє на якір (навантаження на двигун), Н; $\vec{F}_d = -\alpha \vec{V}$ – демпферна сила, Н; α – коефіцієнт демпфування, кг/с.

В роботі [8] описано розрахунок перехідних процесів в магнітофугальних двигунах. Розглянуті електромагнітні процеси в лінійних двигунах, конструкція яких має осьову симетрію.

В роботі [7] наведено варіант чисельного алгоритму розв'язання рівнянь динаміки магнітофугального двигуна. Обґрунтовано доцільність використання методу накладань для розв'язання рівнянь. При цьому результуюче поле двигуна представляється як сума полів, створених окремими елементами конструкції.

В роботі [6] проведено аналіз електромагнітних процесів у коаксіально-лінійному двигуні особливостями конструкції якого є трифазна обмотка статора, з'єднання котушок відбувається за схемою з'єднання асинхронного двигуна.

В роботі [3] розглянуто конструкцію двигуна з обмотками змінного струму на статорі та обмотками постійного струму на якорі. Розроблено математичну модель електромеханічного процесу в коаксіально-лінійному двигуні з допущенням, що магнітопровід виконано шихтованим.

Метою дослідження є розробка алгоритму чисельного рішення нестационарної електромеханічної задачі та дослідження за його допомогою режимів роботи коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами.

Постановка задачі. На рис. 1 зображена спрощена схема коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами, який складається з співвісно розташованих кільцевих котушок D_{w2} , постійних магнітів D_w та тороїдальних сталевих тіл D_1, D_2, D_3 [0, 0] з заданою питомою провідністю $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Якір двигуна складається з масивного неферомагнітного провідного осердя D_1 , феромагнітних провідних кілець D_2 з абсолютною магнітною проникністю μ_2 та зустрічно намагнічених вздовж вісі Oz постійних магнітів D_w з намагніченістю \vec{J} та закріплено

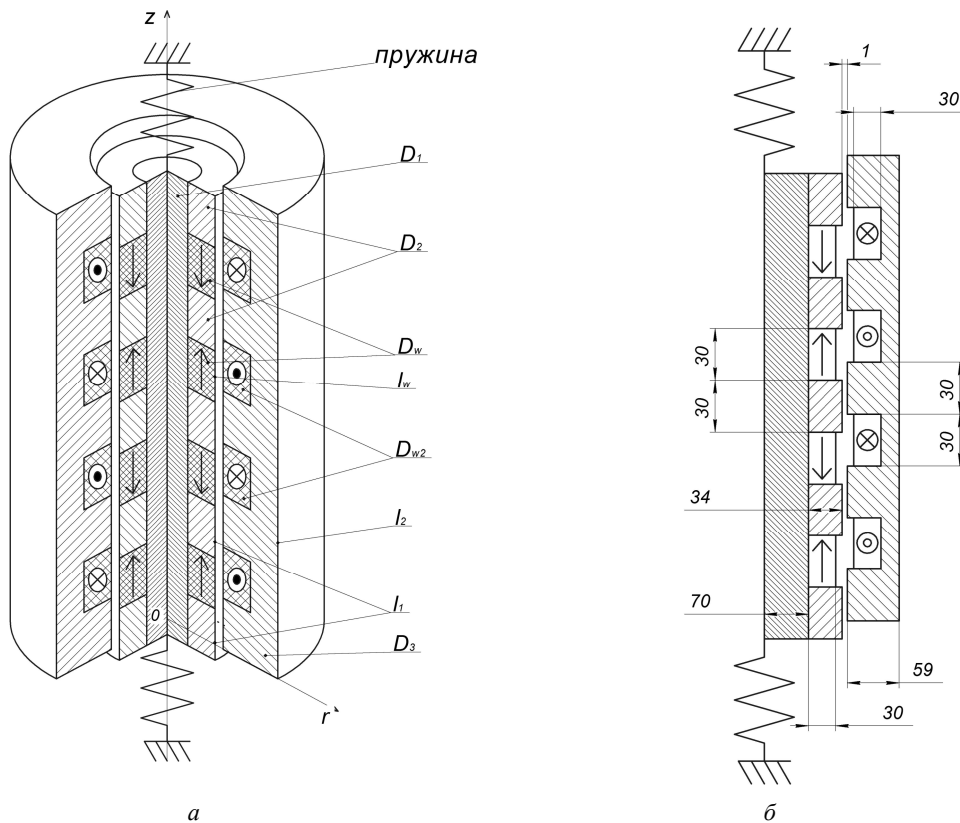


Рис. 1 – Коаксально-лінійний двигун з постійними магнітами:
а – спрощена схема; б – меридіанний переріз.

пружинами з жорсткістю k . Статор виконано з масивного феромагнітного провідника D_3 з абсолютною магнітною проникністю μ_3 та розміщених в ньому котушок D_{w2} , які живляться від перетворювача частоти з напругою $u_2 = u_2(t)$ або від джерела струму зі струмом $i_{w2}(t)$.

Вісь магнітної системи суміщається з віссю z циліндричної системи координат (r, α, z) .

Розрахунок осесиметричного поля достатньо виконати, як відомо, в меридіанній площині $\alpha = const$, оскільки в інших площинах воно буде ідентичним.

В загальному вигляді система інтегродиференціальних рівнянь для розрахунку густини вихрових струмів в масивних провідниках та струмів намагніченості на границях магнітопроводів має вид [1,5]:

$$\begin{aligned} \sigma(Q,t) + \frac{\chi}{\pi} \int_l \sigma(M,t) P(Q,M) dl_M + \\ + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\chi}{\pi} \int_D \delta(M,t) P(Q,M) ds_M = \\ = - \frac{\chi}{\pi} \int_{l_w} J(M) P(Q,M) dl_M - \\ - \frac{\chi}{\pi} \int_{D_{w2}} \delta_{w2}(M,t) P(Q,M) ds_M \\ Q \in l = l_1 + l_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_l \sigma(M,t) T(Q,M) dl_M + \\ + \frac{\delta(Q,t)}{\gamma \lambda} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \delta(M,t) T(Q,M) ds_M = \\ = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{w2}} \delta_{w2}(M,t) T(Q,M) ds_M + \Phi(Q,t) \end{aligned}$$

$$Q \in D = D_1 + D_2 + D_3, \quad (4)$$

$$\delta(Q,0) = \delta^{(0)}(Q), \quad \delta_w(Q,0) = \delta_w^{(0)}(Q),$$

$$\sigma(M,0) = \sigma^{(0)}(M), \quad (5)$$

де $\sigma(Q,t)$ – миттєве значення густини простого шару струмів намагнічування в точці Q границі феромагнітних тіл $l = l_1 + l_2$;

l_1 – границя феромагнітних масивних кілець яко-ря,

l_2 – границя феромагнітного масивного статора (рис. 1, б);

$\delta(Q,t)$ – миттєве значення густини вихрових струмів в точці Q перерізу масивних провідників $D = D_1 + D_2 + D_3$;

$\sigma(M,t)$, $\delta(M,t)$ – теж саме в точці M ;

γ – питома електропровідність матеріалів осердя, кілець та статора;

$\chi = (\mu^+ - \mu^-) / (\mu^+ + \mu^-)$, μ^+ , μ^- – абсолютна магнітна проникність матеріалів феромагнітних кілець яко-

ря та статора при наближенні до точки M відповідно зсередини та ззовні;

$$P(Q, M) = \vec{e}_z [\vec{n}_Q \times \vec{b}(Q, M)] = \\ = n_z(Q) b_r(Q, M) - n_r(Q) b_z(Q, M),$$

$$b_r(Q, M) = \frac{z_Q - z_M}{r_Q \sqrt{(r_Q + r_M)^2 + (z_Q - z_M)^2}} \times \\ \times \left[-K(k) + \frac{r_Q^2 + r_M^2 + (z_Q - z_M)^2}{(r_M - r_Q)^2 + (z_Q - z_M)^2} E(k) \right],$$

$$b_z(Q, M) = \frac{1}{r_Q \sqrt{(r_Q + r_M)^2 + (z_Q - z_M)^2}} \times \\ \times \left[K(k) + \frac{r_M^2 - r_Q^2 + (z_Q - z_M)^2}{(r_M - r_Q)^2 + (z_Q - z_M)^2} E(k) \right],$$

$$T(Q, M) = \sqrt{r_M / r_Q} f(k), \quad f(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k),$$

$$k^2 = \frac{4r_Q r_M}{(r_Q + r_M)^2 + (z_Q - z_M)^2},$$

де r_Q, z_Q, r_M, z_M – координати точок Q та M відповідно;

$K(k), E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду;

$\Phi(Q, t) = \gamma [\vec{V}(Q, t) \times \vec{B}(Q, t)] \vec{e}_z$ – доданок, що відповідає за вплив швидкості руху якоря на розподіл густини вихрових струмів;

$V(Q, t)$ – швидкість руху якоря відносно статора;

$\vec{B}(Q, t)$ – магнітна індукція, що обумовлена струмами $\delta_{w2}(M, t)$ обмотки статора, вихровими струмами $\delta_2(M, t)$ в масивному статорі та струмами намагнічування $\sigma_2(M, t)$ на його границі

$$\vec{B}(Q, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{w2}} \delta_{w2}(M, t) \vec{b}(Q, M) ds_M + \\ + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_2} \delta_2(M, t) \vec{b}(Q, M) ds_M + \\ + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_2} \sigma_2(M, t) \vec{b}(Q, M) dl_M,$$

де $\delta_w^{(0)}(Q), \sigma^{(0)}(M), \delta^{(0)}(Q)$ – початкові значення густини струмів в обмотці статора, вихрових струмів та струмів намагнічування, які визначаються з докомутаційного режиму.

Розрахунок поля постійних, однорідно-намагнічених паралельно вісі Oz , магнітів можна звести до розрахунку поля від простого шару струмів з густиною $\sigma_J = [\vec{J} \times \vec{n}] \vec{e}_z$ на границі l_w постійних магнітів [11], де \vec{n} – зовнішня нормаль до границі магніту, що враховано при виводі рівняння (3).

Доповнюємо інтегро-диференційні рівняння для густини струмів (3), (4) рівняннями руху якоря з початковими умовами:

$$m \frac{dV(t)}{dt} = -2kz(t) - mg + F_{em}(t) + F_s(t) + F_o(t), \quad (6)$$

$$\frac{dz}{dt} = V(t), \quad (7)$$

$$z(0) = z^{(0)}, \quad V(0) = V^{(0)}, \quad (8)$$

де $F_{em}(t), F_s(t), F_o(t)$ – миттєві значення z -проекції електромагнітної сили, зовнішньої сили та демпферної сили;

$z(0) = z^{(0)}, V(0) = V^{(0)}$ – початкові значення координати та швидкості руху якоря.

Апроксимація системи інтегро-диференційних рівнянь. Для апроксимації за просторовими змінними використовується метод повного осереднення [9, 10, 11, 2], який має переваги перед іншими завдяки розбиттю областей на доволі великі, порівняно з вимогами інших методів, ділянки при зберіганні точності апроксимації.

Розбиваємо меридіанний переріз кожного з масивних провідників $D_m, m \in \{1, 2, 3\}$, відповідно на N_{D_m} елементарних областей $\Delta D_{mi}, i = 1, 2, \dots, N_{D_m}$, а слід l_1, l_2 від перерізу меридіанною площиною границі феромагнітних кілець якоря D_1 та статора D_2 на N_{l_1}, N_{l_2} елементарних ділянок $\Delta l_{im}, i = 1, 2, \dots, N_{l_m}, m \in \{1, 2\}$. Переріз обмотки статора D_{w2} розбиваємо на $N_{D_{w2}}$ областей, кожна з яких є переріз котушки із заданою густиною струму. Розбиваємо границю l_w постійних магнітів на N_w елементарних відрізків $\Delta l_{wi}, i = 1, 2, \dots, N_w$. Для шуканих величин використовуємо кусочно-постійну апроксимацію.

Застосовуючи метод повного осереднення, система інтегро-диференційних рівнянь (3), (4) апроксимується за просторовими змінними наступною системою рівнянь:

$$\frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 D_1} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\mu_2 \chi_1}{\mu_0 \pi} P_{L_1 D_2} \bar{\delta}_2(t) + \\ + \frac{\mu_3 \chi_1}{\mu_0 \pi} P_{L_1 D_3} \bar{\delta}_3(t) + \left(\Delta L_1 + \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_1} \right) \bar{\sigma}_1(t) + \\ + \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_2} \bar{\sigma}_2(t) = -\frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_w} \bar{\sigma}_J - \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t), \quad (9)$$

$$\frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 D_1} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\mu_2 \chi_2}{\mu_0 \pi} P_{L_2 D_2} \bar{\delta}_2(t) + \frac{\mu_3 \chi_2}{\mu_0 \pi} P_{L_2 D_3} \bar{\delta}_3(t) + \\ + \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_1} \bar{\sigma}_1(t) + \left(\Delta L_2 + \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_2} \right) \bar{\sigma}_2(t) = \\ = -\frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_w} \bar{\sigma}_J - \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t), \quad (10)$$

$$\frac{\Delta D_1}{\gamma_1 \lambda} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_1} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_2} \bar{\delta}_2(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_3}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_3} \bar{\delta}_3(t) - \frac{\mu_3}{\mu_0} V(t) B_{r D_1 D_3} \bar{\delta}_3(t) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 L_1} \bar{\sigma}_1(t) + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 L_2} \bar{\sigma}_2(t) - V(t) B_{r D_1 L_2} \bar{\sigma}_2(t) = \\
& = - \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t) + V(t) B_{r D_1 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t), \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 D_1} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\Delta D_2}{\gamma_2 \lambda} \bar{\delta}_2(t) + \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 D_2} \bar{\delta}_2(t) + \\
& + \frac{\mu_3}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 D_3} \bar{\delta}_3(t) - \frac{\mu_3}{\mu_0} V(t) B_{r D_2 D_3} \bar{\delta}_3(t) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 L_1} \bar{\sigma}_1(t) + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 L_2} \bar{\sigma}_2(t) - V(t) B_{r D_2 L_2} \bar{\sigma}_2(t) = \\
& = - \frac{\partial}{\partial t} T_{D_2 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t) + V(t) B_{r D_2 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 D_1} \bar{\delta}_1(t) + \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 D_2} \bar{\delta}_2(t) + \frac{\Delta D_3}{\gamma_3 \lambda} \bar{\delta}_3(t) + \\
& + \frac{\mu_3}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 D_3} \bar{\delta}_3(t) + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 L_1} \bar{\sigma}_1(t) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 L_2} \bar{\sigma}_2(t) = - \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 D_{w2}} \bar{\delta}_{w2}(t) - \frac{\partial}{\partial t} T_{D_3 L_w} \bar{\sigma}_J, \quad (13)
\end{aligned}$$

де $\lambda = \mu_0 / (2\pi)$; $\chi_k = (\mu_k - \mu_0) / (\mu_k + \mu_0)$, $k \in \{1, 2\}$;

$\bar{\delta}_m(t) = \|\delta_{m1}(t), \delta_{m2}(t), \dots, \delta_{mN_{D_m}}(t)\|^T$ – вектор-стовпець, елементами якого є миттєві значення густини вихрових струмів у центрі елементарної області ΔD_{mi} , $i=1, 2, \dots, N_{D_m}$, $m \in \{1, 2, 3\}$;

$$P_{L_k D_m} = \left\| \int_{\Delta L_{ki}} \int_{\Delta D_{mj}} P(Q, M) ds_M dl_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{L_k}}, \quad j=1, \overline{N_{D_m}},$$

$$k \in \{1, 2\}, \quad m \in \{1, 2, 3\};$$

$$P_{L_k L_m} = \left\| \int_{\Delta L_{ki}} \int_{\Delta L_{mj}} P(Q, M) dl_M dl_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{L_k}}, \quad j=1, \overline{N_{L_m}},$$

$$k \in \{1, 2\}, \quad m \in \{1, 2\};$$

$\Delta L_k = \text{diag} \|\Delta L_{k1}, \Delta L_{k2}, \dots, \Delta L_{kN_{L_k}}\|$ – діагональна матриця розмірності $N_{L_k} \times N_{L_k}$, елементами якої є довжини відрізків ΔL_{ik} , $i=1, 2, \dots, N_{L_k}$, на які розбивається границя L_k k -го феромагнітного тіла, $k \in \{1, 2\}$;

$\bar{\sigma}_m(t) = \|\sigma_{m1}(t), \sigma_{m2}(t), \dots, \sigma_{mN_{L_m}}(t)\|^T$ – вектор-стовпець, елементами якого є значення миттєвої густини струмів намагніченості в центрі елементарної ділянки ΔL_{mi} , $i=1, 2, \dots, N_{L_m}$, $m \in \{1, 2\}$;

$$P_{L_k L_w} = \left\| \int_{\Delta L_{ki}} \int_{\Delta L_{wj}} P(Q, M) dl_M dl_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{L_k}}, \quad j=1, \overline{N_{L_w}},$$

$$k \in \{1, 2\};$$

$$P_{L_k L_w} \bar{\sigma}_J = \left\| \int_{\Delta L_{ki}} \int_{L_w} \sigma_J(M) P(Q, M) dl_M dl_Q \right\|^T, \quad i=1, 2, \dots, N_{L_k},$$

$k \in \{1, 2\}$ – вектор-стовбець розмірності N_{L_k} , що враховує поле постійних магнітів;

$\bar{\delta}_{w2}(t) = \|\delta_{w21}(t), \delta_{w22}(t), \dots, \delta_{w2N_{D_{w2}}}(t)\|^T$ – вектор-стовпець розмірності $N_{D_{w2}}$; його компонентами є миттєві значення густини вихрових струмів на ділянках ΔD_{w2j} , $j=1, 2, \dots, N_{D_{w2}}$, на які розбивається область D_{w2} ;

$$P_{L_k D_{w2}} = \left\| \int_{\Delta L_{ki}} \int_{\Delta D_{w2j}} P(Q, M) ds_M dl_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{L_k}},$$

$$k \in \{1, 2\}, \quad j=1, \overline{N_{D_{w2}}};$$

$\Delta D_k = \text{diag} \|\Delta D_{k1}, \Delta D_{k2}, \dots, \Delta D_{kN_{D_k}}\|$ – діагональна матриця розмірності $N_{D_k} \times N_{D_k}$, елементами якої є площі елементів ΔD_{ki} , $i=1, 2, \dots, N_{D_k}$, на які розбивається переріз D_k , $k \in \{1, 2, 3\}$;

$$T_{D_k D_m} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta D_{mj}} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{D_m}},$$

$$k, m \in \{1, 2, 3\};$$

$$T_{D_k L_m} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta L_{mj}} T(Q, M) dl_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{L_m}},$$

$$k \in \{1, 2, 3\}, \quad m \in \{1, 2\};$$

$$T_{D_k L_w} \bar{\sigma}_J = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{L_w} \sigma_J(M) T(Q, M) dl_M ds_Q \right\|^T, \quad i=1, \overline{N_{D_k}},$$

$j=1, \overline{N_{L_w}}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ – вектор-стовбець розмірності N_{L_k} , що враховує поле постійних магнітів;

$$T_{D_k D_{w2}} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta D_{w2j}} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{D_{w2}}},$$

$$k \in \{1, 2, 3\};$$

$$B_{r D_k D_3} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta D_{3j}} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{D_3}},$$

$$k \in \{1, 2\};$$

$$B_{r D_k L_2} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta L_{2j}} T(Q, M) dl_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{L_2}},$$

$$k \in \{1, 2\};$$

$$B_{r D_k D_{w2}} = \left\| \int_{\Delta D_{ki}} \int_{\Delta D_{w2j}} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i=1, \overline{N_{D_k}}, \quad j=1, \overline{N_{D_{w2}}},$$

$$k \in \{1, 2\}.$$

Далі на часовій осі обираємо, в загальному випадку, нерівномірну сітку $t_n = n\tau$, $n=1,2,3,\dots$, τ – шаг часової сітки. Проінтегруємо рівняння (11)-(13) на відріжку часу $[t_{n-1}, t_n]$, при цьому інтеграли замінімо наступними наближеними виразами:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \bar{\delta}(t) dt = [c\bar{\delta}(t_n) + (1-c)\bar{\delta}(t_{n-1})] \tau_n, \quad (14)$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial t} T_{DD} \bar{\delta}(t) dt = T_{DD}^n \bar{\delta}(t_n) - T_{DD}^{n-1} \bar{\delta}(t_{n-1}), \quad (15)$$

де c – ваговий коефіцієнт, який приймає значення $\{0; 0,5; 1\}$. При $c=0$ та $c=1$ вираз (14) являє собою формули прямокутників (перший порядок точності), при $c=0,5$ – формули трапецій (другий порядок точності).

Система диференціальних рівнянь (9)-(13) апроксимується наступною системою алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 D_1}^n \bar{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2 \chi_1}{\mu_0 \pi} P_{L_1 D_2}^{(n)} \bar{\delta}_2(t_n) + \frac{\mu_3 \chi_1}{\mu_0 \pi} P_{L_1 D_3}^{(n)} \bar{\delta}_3(t_n) + \\ & + \left(\Delta L_1 + \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_1}^{(n)} \right) \bar{\sigma}_1(t_n) + \\ & + \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_2}^{(n)} \bar{\sigma}_2(t_n) = -\frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 L_w}^{(n)} \bar{\sigma}_J - \frac{\chi_1}{\pi} P_{L_1 D_w}^{(n)} \bar{\delta}_{w2}(t_n); \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 D_1}^{(n)} \bar{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2 \chi_2}{\mu_0 \pi} P_{L_2 D_2}^{(n)} \bar{\delta}_2(t_n) + \frac{\mu_3 \chi_2}{\mu_0 \pi} P_{L_2 D_3}^{(n)} \bar{\delta}_3(t_n) + \\ & + \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_1}^{(n)} \bar{\sigma}_1(t_n) + \left(\Delta L_2 + \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_2}^{(n)} \right) \bar{\sigma}_2(t_n) = \\ & = -\frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 L_w}^{(n)} \bar{\sigma}_J - \frac{\chi_2}{\pi} P_{L_2 D_w}^{(n)} \bar{\delta}_{w2}(t_n); \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta D_1 (1-c) \Delta t}{\gamma_1 \lambda} + T_{D_1 D_1}^{(n)} \right) \bar{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_1 D_2}^{(n)} \bar{\delta}_2(t_n) + \\ & + \left(\frac{\mu_3}{\mu_0} T_{D_1 D_3}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_1 D_3}^{(n)} \right) \bar{\delta}_3(t_n) + \\ & + T_{D_1 L_1}^{(n)} \bar{\sigma}_1(t_n) + \left(T_{D_1 L_2}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_1 L_2}^{(n)} \right) \bar{\sigma}_2(t_n) = \\ & = - \left(T_{D_1 D_w}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_1 D_w}^{(n)} \right) \bar{\delta}_{w2}(t_n) + \\ & + \left(\frac{\Delta D_1 c \Delta t}{\gamma_1 \lambda} + T_{D_1 D_1}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_1(t_{n-1}) + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_1 D_2}^{(n-1)} \bar{\delta}_2(t_{n-1}) + \\ & + \left(\frac{\mu_3}{\mu_0} T_{D_1 D_3}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) c \Delta t B_{r D_1 D_3}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_3(t_{n-1}) + T_{D_1 L_1}^{(n-1)} \bar{\sigma}_1(t_{n-1}) + \\ & + \left(T_{D_1 L_2}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) c \Delta t B_{r D_1 L_2}^{(n-1)} \right) \bar{\sigma}_2(t_{n-1}) + \\ & + \left(T_{D_1 D_w}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) c \Delta t B_{r D_1 D_w}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_{w2}(t_{n-1}); \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{D_2 D_1}^{(n)} \bar{\delta}_1(t_n) + \left(\frac{\Delta D_2 (1-c) \Delta t}{\gamma_2 \lambda} + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_2 D_2}^{(n)} \right) \bar{\delta}_2(t_n) + \\ & + \left(\frac{\mu_3}{\mu_0} T_{D_2 D_3}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_2 D_3}^{(n)} \right) \bar{\delta}_3(t_n) + \\ & + T_{D_2 L_1}^{(n)} \bar{\sigma}_1(t_n) + \left(T_{D_2 L_2}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_2 L_2}^{(n)} \right) \bar{\sigma}_2(t_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = - \left(T_{D_2 D_w}^{(n)} - V(t_n) (1-c) \Delta t B_{r D_2 D_w}^{(n)} \right) \bar{\delta}_{w2}(t_n) + T_{D_2 D_1}^{(n-1)} \bar{\delta}_1(t_{n-1}) + \\ & + \left(\frac{\Delta D_2 c \Delta t}{\gamma_2 \lambda} + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_2 D_2}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_2(t_{n-1}) + \\ & + \left(T_{D_2 D_3}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) (1-c) \Delta t B_{r D_2 D_3}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_3(t_{n-1}) + T_{D_2 L_1}^{(n-1)} \bar{\sigma}_1(t_{n-1}) + \\ & + \left(T_{D_2 L_2}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) (1-c) \Delta t B_{r D_2 L_2}^{(n-1)} \right) \bar{\sigma}_2(t_{n-1}) + \\ & + \left(T_{D_2 D_w}^{(n-1)} - V(t_{n-1}) (1-c) \Delta t B_{r D_2 D_w}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_{w2}(t_{n-1}); \quad (19) \\ & T_{D_3 D_1}^{(n)} \bar{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_3 D_2}^{(n)} \bar{\delta}_2(t_n) + \\ & + \left(\frac{\Delta D_3 \Delta t}{\gamma_3 \lambda} + \frac{\mu_3}{\mu_0} T_{D_3 D_3}^{(n)} \right) \bar{\delta}_3(t_n) + \\ & + T_{D_3 L_1}^{(n)} \bar{\sigma}_1(t_n) + T_{D_3 L_2}^{(n)} \bar{\sigma}_2(t_n) = \\ & = - T_{D_3 D_w}^{(n)} \bar{\delta}_{w2}(t_n) + T_{D_3 D_1}^{(n-1)} \bar{\delta}_1(t_{n-1}) + \frac{\mu_2}{\mu_0} T_{D_3 D_2}^{(n-1)} \bar{\delta}_2(t_{n-1}) + \\ & + \left(\frac{\Delta D_3 \Delta t}{\gamma_3 \lambda} + \frac{\mu_3}{\mu_0} T_{D_3 D_3}^{(n-1)} \right) \bar{\delta}_3(t_{n-1}) + \\ & + T_{D_3 L_1}^{(n-1)} \bar{\sigma}_1(t_{n-1}) + T_{D_3 L_2}^{(n-1)} \bar{\sigma}_2(t_{n-1}) - \\ & - T_{D_3 L_w}^{(n)} \bar{\sigma}_J + T_{D_3 D_1}^{(n-1)} \bar{\sigma}_J + T_{D_3 D_w}^{(n-1)} \bar{\delta}_{w2}(t_{n-1}). \quad (20) \end{aligned}$$

За допомогою методу повного осереднення [9, 10, 11, 2] та перетворень (14)-(15) система інтегродиференціальних рівнянь (3)-(4) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16)-(20) для густини струмів намагніченості $\bar{\sigma}(t_n)$ на границях феромагнітних тіл, та густини вихрових струмів $\bar{\delta}(t_n)$ в перерізі масивних провідників при відомих значеннях $\bar{\sigma}(t_{n-1})$ та $\bar{\delta}(t_{n-1})$, $\bar{\delta}_{w2}(t_{n-1})$.

Знаючи розподіл густини струмів можна визначити величину електромагнітної сили, що діє з боку нерухомого статора на рухомий якір [1, 4, 9].

Пошук зв'язку ускладнюється тим, що необхідно сумісно розв'язувати електромагнітну задачу з пошуку розподілу густини струмів (16)-(20) з початковими умовами (5) та електромагнітної сили, що діє на якір з боку статора, та задачу механіки з пошуку положення якоря та швидкості його руху (6)-(8).

На основі [8] розроблено алгоритм пошуку рішення нестационарної електромеханічної задачі руху якоря коаксіально-лінійного двигуна за різних режимів живлення і навантаження, блок-схему якого представлено на Рис. 2.

З блок-схеми (Рис. 2) видно, що після задавання початкових значень координати $z_{(n-1)}$, швидкості руху якоря $v_{(n-3/2)}$, сили, що діє на якір F^- та розподілу густини струмів $\delta_{(n-1)}$, на дрібній часовій сітці в момент часу t_i на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ послідовно розв'язується електромагнітна задача і шукається значення сили F_i^+ що діє на якір, $i = \bar{1}, m$, m – кількість елементів розбиття інтервалу від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$.

Далі знаходиться середнє значення сили F^+ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$. Знаючи F^+ та F^- - середнє значення сили на інтервалі від $t_{(n-3/2)}$ до $t_{(n-1)}$ знаходимо середнє значення сили, що діє на якір на інтервалі часу від $t_{n-1.5}$ до $t_{(n-1/2)}$, і перше наближення швидкості $v_{(n-1/2)}$.

За відомих $z_{(n-1)}$, $v_{(n-1/2)}$, $\delta_{(n-1)}$ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ послідовно розв'язується електромагні-

тна задача і шукається уточнене значення сили F_i^+ . Знаючи середнє значення сили F^+ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ знаходимо нове положення якоря $z_{(n)}$, та уточнене значення швидкості руху якоря $v_{(n-1/2)}$.

На інтервалі від $t_{(n-1/2)}$ до $t_{(n)}$ послідовно розв'язується електромагнітна задача і шукається значення сили F_i^- , за яким знаходиться середнє значення F^- .

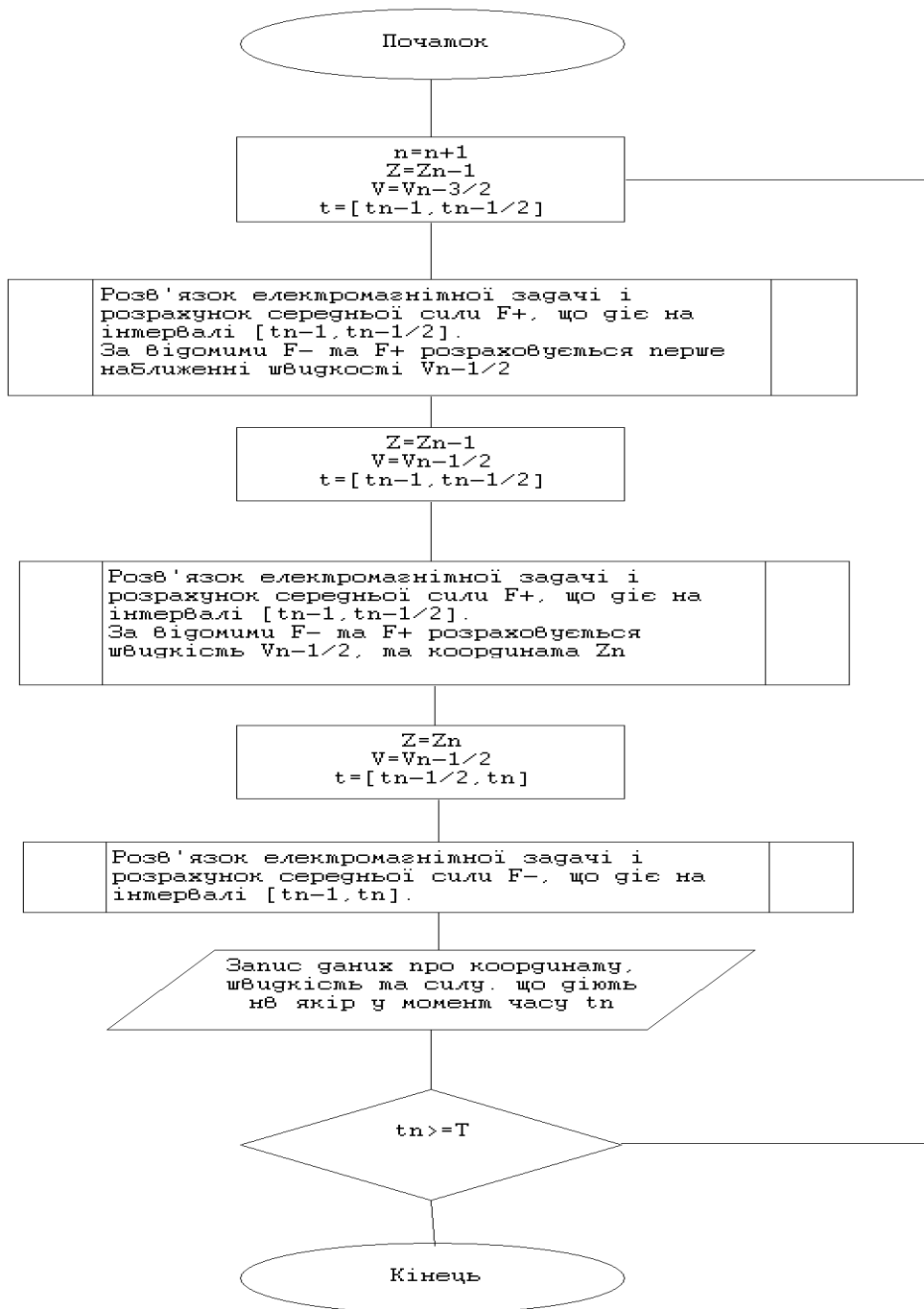


Рис. 2 – Блок-схема алгоритму розв'язку нестационарної електромеханічної задачі

Результати досліджень. Розроблений алгоритм розв'язку нестационарної електромеханічної задачі було реалізовано на мові програмування FORTRAN і проведено ряд чисельних експериментів. Для перевірки достовірності отриманих результатів проводилось порівняння з розв'язком, що отримано за допомогою програмного пакету COMSOL Multiphysics 3.5a для статичних випадків.

1. Для одного полюсного ділення проводився розрахунок γ -компоненти індукції магнітного поля в зазорі при наявності масивних феромагнітних провідників і при зміні густини сили струму в котушці за законом: $\delta(t) = \delta_{\max} \sin(\pi t)$.

Максимальне амплітудне значення густини струму приймають $\delta_{\max} = 3 \cdot 10^6$ А/м². Геометричні параметри лінійного двигуна наведені а рис. 1. б, питома провідність масивних тіл: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 7,6 \cdot 10^6$ См/м, абсолютна магнітна проникність $\mu_2 = \mu_3 = 100\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

На рис. 3 наведено залежність значення γ -компоненти індукції магнітного поля від часу в точці з координатами (0,1045;-0,02), що дозволяє зробити висновок, що середньоквадратичне відхилення рішення, отриманого з використанням розробленого алгоритму від рішення отриманого за допомогою програмного пакету COMSOL Multiphysics 3.5a становить не більше 3%.

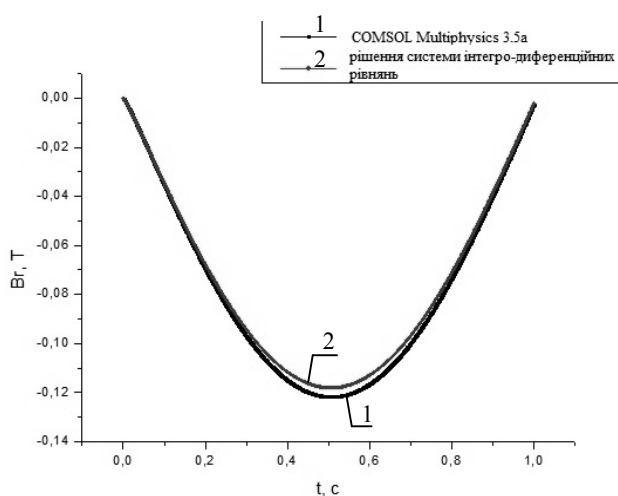


Рис. 3 – Залежність значення γ -компоненти індукції магнітного поля від часу в точці з координатами (0,1045;-0,02).

2. Проводився розрахунок динамічного режиму роботи коаксіально-лінійного двигуна з кількістю пар полюсів $2p = 5$, масою якоря $m = 3000$ кг, жорсткістю пружин $k = 735750$ Н/м, коефіцієнт в'язкого тертя $\alpha = 15$ кг/с, початкове положення якоря $z(0) = -0,02$ м, початкова швидкість $V(0) = 0$ м/с.

На рис. 4, 5 наведено результати розрахунку координати положення якоря та z -компоненти сили, що діє на нього з боку статора.

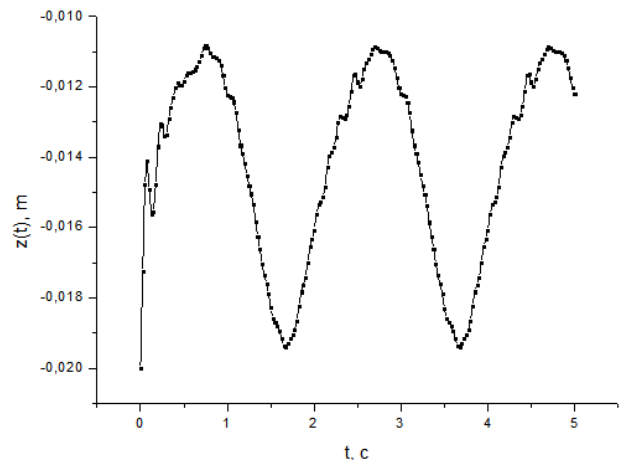


Рис. 4 – Залежність зміщення якоря коаксіально-лінійного двигуна від часу

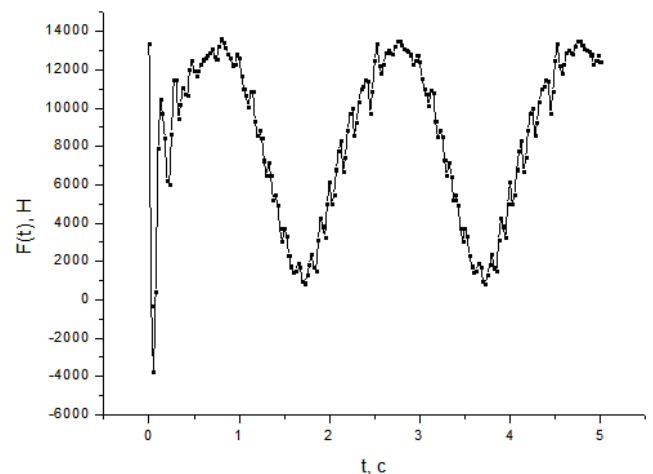


Рис. 5 – Залежність електромагнітної компоненти сили, що діє на якорь коаксіально-лінійного двигуна з боку статора від часу та положення якоря

Висновки. В даній роботі проведено дискретизацію системи інтегро-диференціальних рівнянь для пошуку густини струмів намагніченості на границі магнітопроводів та густини вихрових струмів у масивних провідниках коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами та розроблено алгоритм чисельного розв'язку нестационарної електродинамічної задачі руху якоря коаксіально-лінійного двигуна, що дозволяє з достатньою точністю проводити розрахунок та дослідження режимів його роботи.

Список літератури: 1. A. Zhiltsov I. Kondratenko, D. Sorokin Mathematical modeling of nonstationary electromechanical processes in coaxial-linear engine – ECONTechMOD, Lublin-Lviv-Cracow, 2012. – VOL.12, №2. –Р. 69 – 73. 2. Боженко А. И., Петрущенко Е. И. Моделирование на ЭВМ переходных процессов в осесимметричных устройствах с немагнитными проводниками с учетом симметричности исходного интегро-дифференциального уравнения: Препр. / АН УССР. Ин-т электродинамики; 324.– К.: 1984.–55 с. 3. Евдокимов В.Ф. Расчет электромагнитных и тяговых характеристик коаксиально-линейного индукционного двигателя электрического вибратора методом интегральных уравнений / В.Ф. Евдокимов, А.В. Жильцов, И.П. Кондратенко [и др.] // Электронное моделирование. – 2008. – Т. 30, №4. – С. 85 – 96. 4. Жильцов А. В., Стадник И. П. Измерение намагнитченности однородно намагнитченных постоянных магнитов // Электромеханика. – 2000. – №2. – С. 83-86.

5. Жильцов А.В. Кондратенко И.П., Раценкин А.П., Сорокин Д.С. Математическое моделирование нестационарных электромеханических процессов в коаксиально-линейном двигателе – Моделирование та інформаційні технології. Збірник наукових праць ПІМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України: Спеціальний випуск. – 2010. – Т.2. – С. 47 – 53. 6. Квачев Г.С. Коаксиально-линейные двигатели и их использование в сельском и коммунальном хозяйстве: дис... д-ра техн. наук : 05.09.03 / Г.С. Квачев – Москва, 1969 – 100 с. 7. Квачев Г.С. О численном решении уравнений динамики магнитофугального двигателя / Г.С. Квачев, Е.И. Петрушенко, Н.И. Бессараб // Наука и техника в городском хозяйстве. Киев: Будівельник. — 1967.— вып. VIII. — С. 3 — 19. 8. Квачев Г.С. Расчет переходных процессов в магнитофугальных двигателях / Г.С. Квачев, Е.И. Петрушенко // Наука и техника в городском хозяйстве. Киев: Будівельник. — 1966. — Вып. VII. — С. 3 — 10. 9. Петрушенко Е.И., Гавриушенко О.Е. Алгоритмы расчета на ЭЦВМ критических кривых продольных криволинейных двигателей // Математическое моделирование и теория электрических цепей. – К.: Наукова думка, 1971. – Вып. 9. – С. 144-150. 10. Петрушенко Е.И., Пашко А.И., Трофимчук Н.Л., Филиппова Г.А. Моделирование на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения: Препр. / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 34. – К.: 1986. – 46 с. 11. Петрушенко Е.И. До апроксимації інтегральних кривих теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами // Доповіді АН УРСР. Сер. А.– 1969. – №7.– С. 618-621.

Bibliography (transliterated): 1. Zhiltsov, A., I. Kondratenko and D. Sorokin "Mathematical modeling of nonstationary electromechanical processes in coaxial-linear engine." *ECONTECHMOD*, Lublin-Lviv-Stacow. Vol. 12. No. 2. 2012. 69–73. Print. 2. Bozhenko, A. I., and E. I. Petrusenko "Modelirovanie na EVM perehodnykh protsessov v osetimmetrichnykh ustroystvakh s nemagnitnymi provodnikami s uchetom

simmetrichnosti ishodnogo integro-differencial'nogo uravneniia." *Institut elektrodinamiki AN USSR*, Kyiv. Prepr. 1989. Print. 3. Evdokimov, V.F., A.V. Zhiltsov and I. P. Kondratenko "Raschet elektromagnitnykh i tiagovykh harakteristik koaksialno-lineinogo indukcionnogo dvigatelja elektricheskogo vibratora metodom integralnykh uravnenii." *Elektronnoe modelirovanie*, Kyiv. 4. 2008. 83–86. Print. 4. Zhiltsov, A. V., and I. P. Stadnik "Izmerenie namagnichennosti odnorodno namagnichennykh postoiannykh magnitov." *Elektromehanika* 2. (2000): 83–86. Print. 5. Zhiltsov, A. V., et al. "Matematischeskoe modelirovanie nestacionarnykh elektromehaničeskikh protsessov v koaksialno-lineinom dvigatele." *Modelirovanie ta informatciji tehnologii. Zbirnik naukovikh prac IPME im. G.C. Puhova NAN Ukraïni: Spetsialnij vipusk*, Kyiv. Vol. 2. 2010. 47–53. Print. 6. Kвачев, G. S. *Koaksialno-lineinye dvigateli i ikh ispolzovanie v selskom i kommunalnom hoziaistve. Dis... d-ra tekhn. nauk*. Moskva. 1969. Print. 7. Kвачев, G. S., E. I. Petrusenko and N. I. Bessarab "O chislennom reshenii uravnenii dinamiki magnitofugalnogo dvigatelja." *Nauka i tekhnika v gorodskom hoziaistve*, Kyiv. Vol. VIII. 1967. 3–19. Print. 8. Kвачев, G. S., and E. I. Petrusenko "Raschet perehodnykh protsessov v magnitofugalnykh dvigateliakh." *Nauka i tekhnika v gorodskom hoziaistve*, Kyiv. Vol. VII. 1966. 3–10. Print. 9. Petrusenko, E. I., and O. E. Gavriushenko "Algoritmy rascheta na ETCVM kriticheskikh krivykh prodolnykh kriatronov." *Matematischeskoe modelirovanie i teoriia elektricheskikh tcepei*, Kyiv. Vol. 9. 1971. 144–150. Print. 10. Petrusenko, E. I., A. I. Pashko, N. L. Trofimchuk and G. A. Philippova "Modelirovanie na EVM trekhmernogo magnitnogo polja lineinogo odnoelementnogo transformatora toka na osnove vektornogo integralnogo uravneniia." *AN USSR. Institut problem modelirovaniia v energetike*, Kyiv. Vol. 34. 1986. 86. Print. 11. Petrusenko, E. I. "Do aproksimatcii integralnykh krivnykh teorii elektromagnitnogo polja algebraičnymi sistemami." *Dopovidi AN URSR*. Kyiv. No. 7. 1969. 618–621. Print.

Надійшла (received) 18.06.2015

«Відомості про авторів / About the Authors»

Жильцов Андрій Володимирович – доктор технічних наук, доцент, Національний університет біоресурсів і природокористування України, завідувач кафедри електричних машин і експлуатації електрообладнання; тел.: +38(066) 727-06-00, e-mail: azhilt@mail.ru

Zhiltsov Andrey Vladimirovich – Doctor of Technical Sciences, associate professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, head of electrical machinery and electrical operation, phone: +38 (066) 727-06-00, e-mail: azhilt@mail.ru

Сорокін Дмитро Сергійович – Національний університет біоресурсів і природокористування України, старший викладач кафедри електричних машин і експлуатації електрообладнання; тел.: +38 (050) 280-82-84, e-mail: sdima.asp@gmail.com

Sorokin Dmitry Sergeevich – National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, senior lecturer of electrical machines and maintenance of electric equipment; phone: +38 (050) 280-82-84, e-mail: sdima.asp@gmail.com